1) A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, ligeiramente amortecido e com condições iniciais nulas, designando a função de resposta impulsiva por $h(t)$,

a) estabelecer a expressão da resposta $x(t)$ a uma solicitação transiente genérica $f(t)$.

Caracterizar e esboçar graficamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

b) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$;

c) solicitação em degrau aplicada no instante $t=\tau$.

Para uma solicitação $f(t)$ harmónica, esboçar graficamente em função da frequência e para dois valores distintos da razão de amortecimento,

d) a amplitude da resposta e a fase, e a amplitude da força transmitida ao apoio.

Normalmente, o valor do amortecimento (razão de amortecimento) dum sistema é determinado experimentalmente.

e) Referir sucintamente dois métodos expeditos de identificação da razão de amortecimento.

2) A análise do comportamento dinâmico de um sistema pode basear-se num modelo discreto com n graus de liberdade, cujo modelo espacial é do tipo $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$.

a) Definir coeficientes de influência de flexibilidade e de rigidez;

b) Estabelecer a relação existente entre a matriz de flexibilidade e a matriz de rigidez;

c) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez do modelo espacial.

3) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$.

a) Indicar as propriedades em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;

b) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a influência, na precisão da resposta, dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.

c) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento;

d) Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

4) O comportamento dinâmico de um sistema contínuo é descrito por uma equação diferencial de derivadas parciais e respectivas condições de fronteira e condições iniciais.

a) Exprimir, numa forma genérica, a resposta $v(x,t)$ duma viga a uma solicitação $f(x,t)$, utilizando a sobreposição modal;

b) Comentar a influência do número de modos naturais de vibração, considerados na análise modal truncada, na precisão da resposta da viga em termos em termos do deslocamento $v(x,t)$, do momento fletor $M_f(x,t)$ e do esforço transverso $T(x,t)$.

1) O rotor de um instrumento de medida é controlado por uma mola de torção e um amortecedor viscoso de rotação montados nas suas extremidades.

A massa do rotor é de 50×10^{-3} kg e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é de 12×10^{-3} m.

Quando posto a vibrar, o rotor realiza uma oscilação completa em 4.2 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de $^{169}/_{3}$.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;
c) a rigidez k_t da mola de torção;
d) a constante c de amortecimento viscoso de rotação.

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de 25°, determinar:

e) o tempo que demorou a rodar 25°;
f) a velocidade angular inicial provocada pelo impulso;
g) a energia fornecida pelo impulso.

2) A figura representa uma ponte constituída por duas vigas metálicas simplesmente apoiadas sobre as quais assentam 5 placas de betão de massa m. Cada uma das vigas possui um comprimento ℓ, uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.

Admitindo como aproximação da forma natural fundamental de vibração a solução exacta da viga simplesmente apoiada, e utilizando o método da energia de Rayleigh,

a) Determinar uma estimativa da frequência natural fundamental;
b) Comparar o resultado obtido com a solução exacta para uma viga simplesmente apoiada de massa equivalente (distribuição uniforme da massa das placas sobre ambas as vigas). Comentar.

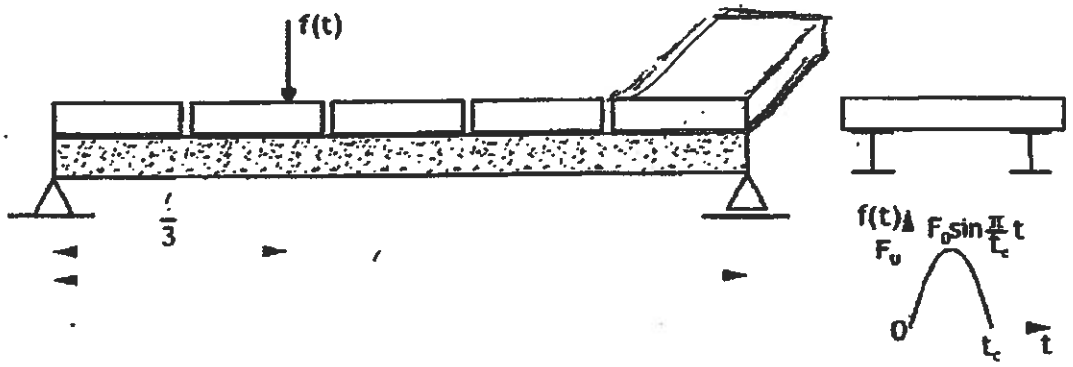
Utilizando as funções de aproximação $\psi_1(x)=\sin\frac{\pi}{\ell}x$ e $\psi_2(x)=\sin\frac{2\pi}{\ell}x$, e o método de Rayleigh-Ritz,

c) Determinar uma estimativa das duas primeiras frequências naturais e das respectivas formas naturais de vibração;
d) Representar graficamente a aproximação das formas naturais;

Admitindo uma distribuição uniforme da massa das placas sobre ambas as vigas, para a solicitação representada na figura e actuante sobre cada uma das vigas, e com os valores numéricos seguintes,

$$\ell=12\text{ m}\quad E=210\text{ GPa}\quad I=4.8\times10^{-4}\text{ m}^4\quad \rho A=90.7\text{ kg/m}\quad m=3000\text{ kg}\quad t_c=\frac{0.33}{f}\text{ s}$$

e) Determinar, usando os três primeiros modos naturais de vibração, o deslocamento e o momento fletor máximos a meio vão das vigas. Comentar os resultados obtidos.



Exame 2004-01-16

Parte teórica

1) a.) Seja $h(t)$ a resposta ao impulso para o instante $t=0$.

Então, para o instante genérico $t=\tau$:

$$h(t-\tau)$$

Então, a resposta a uma solicitação genérica $f(t)$ no instante infinitesimal $d\tau$ vem:

$$f(\tau)\, d\tau \cdot h(t-\tau)$$

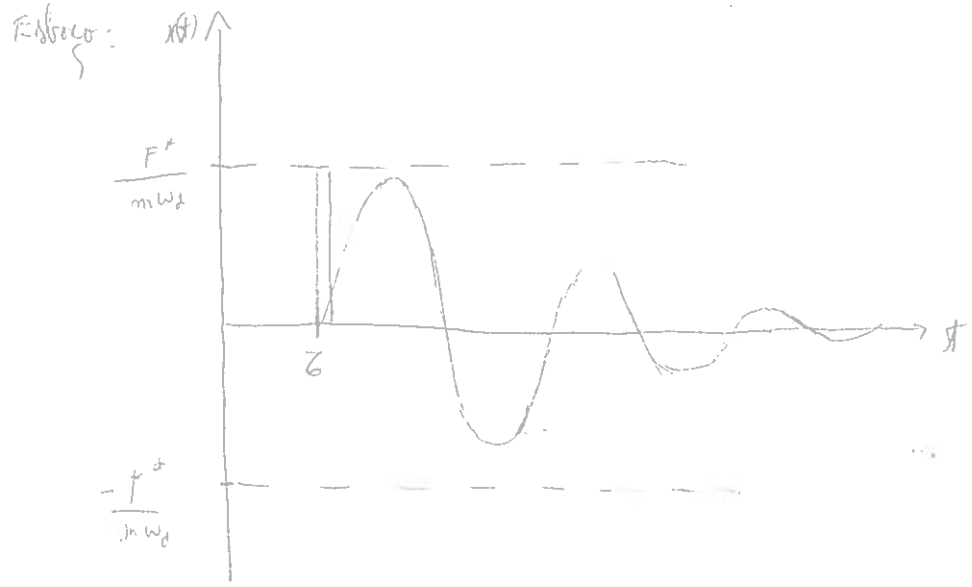
Integrando até ao instante genérico $\tau = t$:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{C.q.d.}$$

b) $$x(t) = \frac{F^*}{m\omega_d}\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \cos\left(\omega_d (t-\tau)\right), \quad t > \tau$$

Resposta harmónica (com decaimento se $\xi > 0$, como é o caso), cuja amplitude máxima pode ir até $\frac{F^*}{m\omega_d}$, com F^* sendo o valor da força impulsiva aplicada.

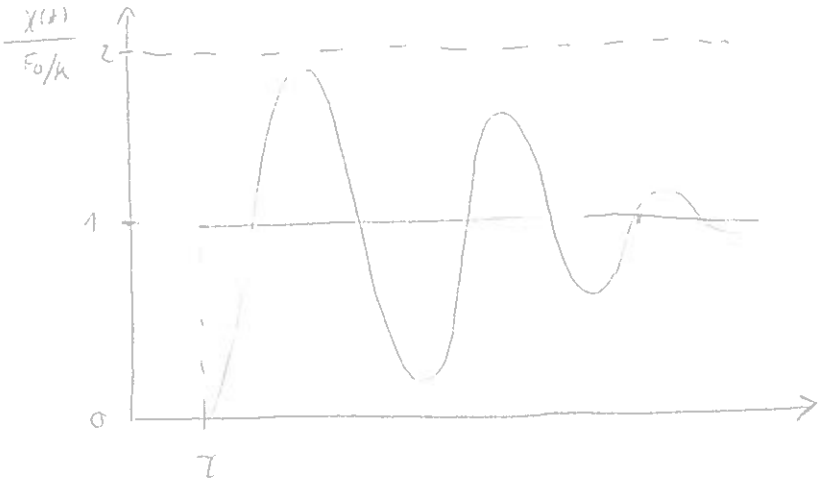
Esboço:



c) Solicitação degrau

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \cos(\omega_d(t-\tau))\, d\tau \quad , \quad t > \tau$$

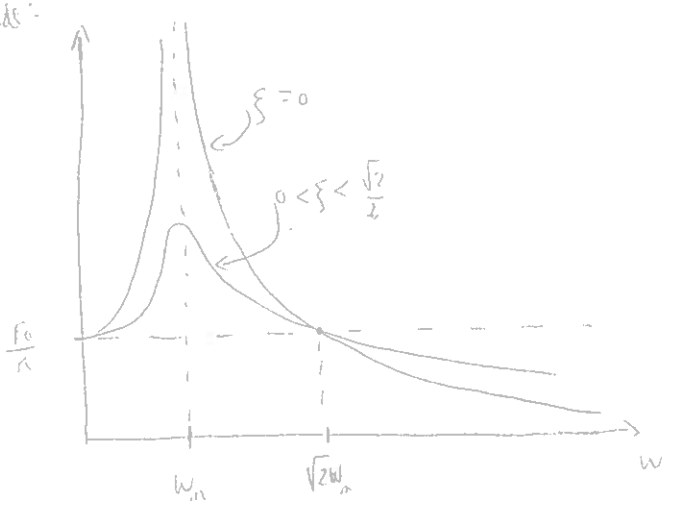
É uma resposta harmônica em torno da posição $\frac{F_0}{k}$ (deslocamento estático), que pode atingir $\frac{2F_0}{k}$ e 0.



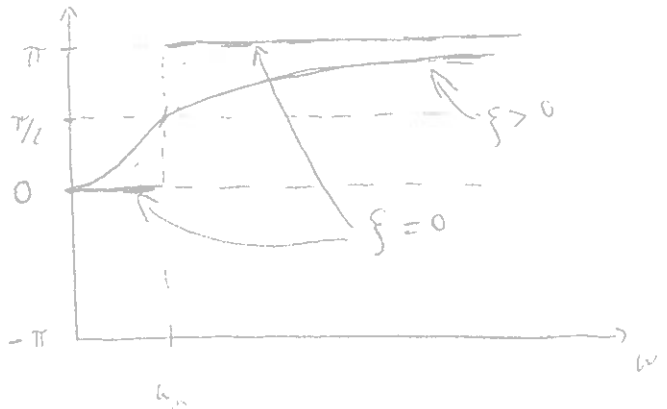
d)

$$X(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Amplitude:

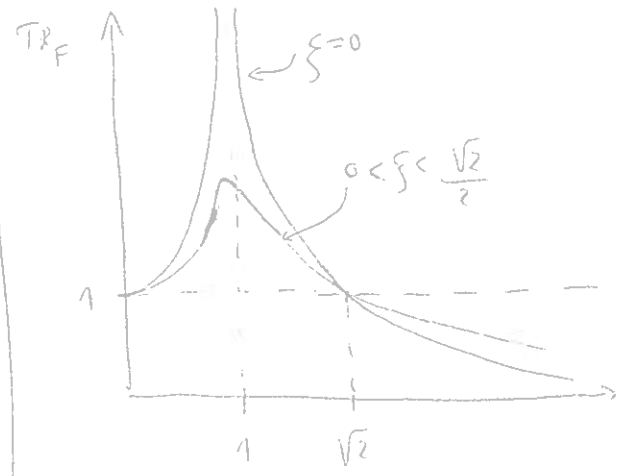


Fase:



Força transmitida ao apoio:

$$TR_F = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Basta multiplicar pela amplitude da força de solicitação

2) Método 1:

- Provocar uma perturbação inicial (de deslocamento ou velocidade) e medir a resposta livre ou natural do sistema. Em seguida determinar o período e com pelo menos 2 pontos à distância de N vezes o período da resposta aplicar o método do decremento logarítmico para obter ξ:

$$\ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 = t_1 + NT)} = \xi \omega_n T \cdot N \quad , \quad \text{com} \quad N \in \mathbb{N}$$

Método 2:

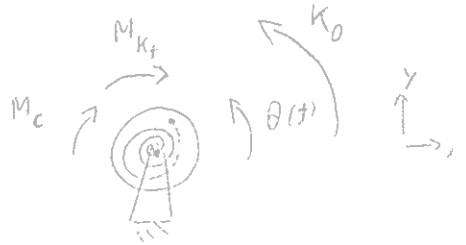
- Para obter uma estimativa da razão de amortecimento também se pode usar o método da meia-potência ("half-power bandwidth method"). Este método baseia-se na utilização de 3 pontos de frequência, obtidos através do sinal da Função de Resposta em Frequência, ao invés de se utilizar o sinal da resposta no tempo (como é utilizado no método do decremento logarítmico). A cada frequência natural corresponde um máximo no espectro da resposta em frequência. 3 dB abaixo desse máximo encontramos 2 pontos que correspondem à meia-potência. Quando maior o amortecimento maior é a banda de frequências entre estes 2 pontos. Portanto, através dessa relação pode-se obter ξ: $\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} = 2\xi \right| = \frac{1}{Q}$

2) ; 3) ; 4) Não sei

Parte Prática

1) $i_z = \sqrt{\frac{I_{33}}{m}} \Rightarrow I_{33} = m \cdot i^2 = 50\times10^{-3} \times (12\times10^{-3})^2 = 7,2\times10^{-6}\ kg\ m^2$

$T = 4,2\ s \Rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{4,2} \cong 1,4960\ rad/s$



a) $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{169}{3}$ Por duas amplitudes sucessivas estou a considerar deslocamentos separados por um período inteiro (e não meio)

$M_{Kf} = K_f\,\theta \quad ; \quad M_c = C \cdot \dot{\theta}$

$$\vec{H}_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 7,2\times10^{-6} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,2\times10^{-6}\,\dot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{K}_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,2\times10^{-6}\,\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Eq. diferencial do movimento.

$$-K_f \cdot \theta - C \cdot \dot{\theta} = 7,2\times10^{-6}\,\ddot{\theta} \Rightarrow 7,2\times10^{-6} \cdot \ddot{\theta}(t) + C \cdot \dot{\theta}(t) + K_f \theta(t) = 0$$

$$\theta(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \frac{A\, e^{-\xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)\cdot(t)}}{A\, e^{-\xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)\cdot(t+4,2)}} = \frac{169}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\left[-\xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)t + \xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)t + \xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)\times4,2\right]} = \frac{169}{3} \Rightarrow \xi \cong 0,6416$$

b) $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1,9503 \text{ rad/s}$

c) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow K_t \cong 2,739 \times 10^{-5} \text{ N m/rad}$

(K_t sobre K_{eq}; $m_{eq} = 7,2 \times 10^{-6}$)

d) $\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} \iff \xi = \frac{c}{2 m_{eq} \cdot \omega_n} \Rightarrow c \cong 1,802 \times 10^{-5} \text{ N m s}$

e) Resposta ao impulso:

$$\theta(t) = F^* \frac{1}{m_{eq} \omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{F^*}{m_{eq} \omega_d} \cdot \xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t + \frac{F^*}{m_{eq}} e^{-\xi \omega_n t} \cos \omega_d t = 0$$

$$\Rightarrow \cos \omega_d t - \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t = 0 \Rightarrow \sqrt{1^2 + \left(\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}\right)^2} \cos(\omega_d t + \phi) =$$

$$\Rightarrow \omega_d t + \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff t = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + k\frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\text{com } \phi = \arctan\left(\frac{-\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}}{1}\right) = \arctan\left(-\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}\right)$$

Assim: $t = \frac{1}{1,4960}\left[-\arctan\left(-\frac{0,6416 \times 1,9503}{1,4960}\right) + \frac{\pi}{2}\right] + k\frac{\pi}{1,4960} = \boxed{0,5844} + \frac{k\pi}{1,4960}$

Portanto, demorou 0,5844 s a atingir a rotação máxima.

f) $\dot{\theta}_0 = \dfrac{F^*}{m_{eq}}$

Determinemos F^*:

$$\frac{25\pi}{180} = \frac{F^*}{m_{eq}\,\omega_d}\, e^{-\xi\omega_n \overbrace{t}^{0,5844}} \operatorname{sen}(\omega_d \overbrace{t}^{0,5844}) \Rightarrow F^* \cong 1{,}27 \times 10^{5}\ Nm$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{1{,}27\times10^{-5}}{7{,}2\times10^{-6}} \cong 1{,}768\ rad/s \approx 17\ rpm$$

g) A energia fornecida pelo impulso é de:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} \times 7{,}2\times10^{-6} \times 1{,}768^2 \approx 1{,}125 \times 10^{-5}\ J$$

2) Não fiz